ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2016, № 3

УДК 536.421

М.Г. Бердник
Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», Україна
пр. Карла Маркса, 19, м. Дніпро, 49005

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РІШЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НОВОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА

M.G. Berdnyk
State Higher Education Institution "National Mining University", Ukraine
Karl Marx av., 19. Dnipro, 49005

MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLUTION WITH THE NEW INTEGRAL TRANSFORMATION OF A GENERALIZED BOUNDARY PROBLEM PIECEWISE UNIFORM HEAT TRANSFER CYLINDER

У статті, за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення, знайдено температурне поле порожнього кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є.
Ключові слова: інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації.
In the article the developed new integral transformation found the temperature field empty piecewise homogeneous circular cylinder towards the polar radius that rotates at a constant angular velocity axis OZ, taking into account the finite speed of propagation of heat in the form of convergent orthogonal series in Bessel functions and Fourier 'is.
Key words: the integral Laplace transforms, Fourier, relaxation time.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1,2]. Однак при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання, вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1,2].

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Метою роботи є розробка нової узагальненої математичної моделі розподілу температурних полів у порожньому кусково-однорідному циліндрі у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та розв'язання отриманої крайової задачі, розв'язок якої використовується під час керування температурними полями.

Як показує огляд літератури, теплообмін у циліндрах, які обертаються, вивчений на даний час ще недостатньо [1]. Показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндрів, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання. Так, доводиться [1], що умови стійкості обчислень у методі кінцевих елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних

неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-\frac{\Delta F_0}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi}-\frac{Pd}{2} \geq 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega = 1{,}671 сек^{-1}$ радіусом 100 мм, то змінні $\Delta\varphi$ та ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi \leq 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \qquad \Delta F_o \leq 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра, за умови Bi = 5 (Bi – критерій Біо), час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo \approx 0.025$[1]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату, видається нереальним.

Тому для вирішення крайової задачі, яка виникає при математичному моделюванні нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Постановка задачі

Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля порожнього кругового циліндра зовнішнього радіуса R в циліндричній системі координат (r,φ,z), кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса r, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. І теплофізичні властивості якого в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу $G(\varphi)$ і $G_1(\varphi)$ відповідно.

Відносну температуру циліндра $\theta(\rho,\varphi,t)$ можна представити у вигляді:

$$\theta(\rho,\varphi,t)=\begin{cases}\theta_1(\rho,\varphi,t) & якщо \quad \rho\in(\rho_0,\rho_1)\\ \theta_2(\rho,\varphi,t) & якщо \quad \rho\in(\rho_1,\rho_2)\end{cases} \tag{1}$$

Відносні температури $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ s–го шара циліндра обчислюються за формулами:

$$\theta_s(\rho,\varphi,t)=\frac{T_s(\rho,\varphi,t)-G_0}{T_{\max}-G_0},$$

де $T_s(\rho,\varphi,t)$ - температури s-го шару циліндра; $T_{\max}$- максимальна температура циліндра; $\rho=\dfrac{r}{R}$; s=1,2.

Розв'язок задачі

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [1], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні набуває вигляду:

$$\gamma\,\mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \qquad (2),$$

де $\gamma-$ щільність середовища; c - питома теплоємність; λ- коефіцієнт теплопровідності; $T(\rho,\varphi,t)$ – температура середовища; t –час; τ_r - час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра $\theta(\rho,\varphi,t)$ складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області $D_s=\{(\rho,\varphi,t)|\rho\in(\rho_{s-1},\rho_s),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що, з урахуванням прийнятих допущень, запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_s}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi\partial t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_s}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (3)$$

з початковими умовами

$$\theta_s(\rho,\varphi,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_s(\rho,\varphi,0)}{\partial t}=0\ , \qquad (4)$$

граничними умовами

$$\theta_1(\rho_0,\varphi,t)=W(\varphi),\quad \theta_2(1,\varphi,t)=V(\varphi), \qquad (6)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1,\varphi,t)=\theta_2(\rho_1,\varphi,t), \qquad (6)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_1(\rho_1,\varphi,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_2(\rho_1,\varphi,t)}{\partial\rho}, \qquad (7),$$

де $\rho_1=\dfrac{R_1}{R}$; $\rho_0=\dfrac{R_0}{R}$; $\rho_2=1$; R_1 - радіус межі шарів; R_0 - внутрішній радіус циліндра; λ_s- коефіцієнт теплопровідності, γ_s-щільність, c_s- питома теплоємність, $a_s=\dfrac{\lambda_s}{c_s\gamma_s}$ - коефіцієнт температуропровідності s-го шару циліндра; $\alpha_s^2=\dfrac{a_s}{R^2}$; s=1,2; $W(\varphi),V(\varphi)\in\mathrm{C}(\mathrm{D})$.

Тоді рішення крайової задачі (3)-(7) $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ, φ, t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто

$\theta_s(\rho,\varphi,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $W(\varphi), V(\varphi)$, $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [4]:

$$\begin{Bmatrix}\theta_s(\rho,\varphi,t)\\ W(\varphi)\\ V(\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_{s,n}(\rho,t)\\ W_n\\ V_n\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \tag{8}$$

де

$$\begin{Bmatrix}\theta_{s,n}(\rho,t)\\ V_n\\ V_n\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta_s(\rho,\varphi,t)\\ W(\varphi)\\ V(\varphi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\varphi)d\varphi,$$

де $\theta_{s,n}(\rho,t)=\theta_{s,n}^{(1)}(\rho,t)+i\,\theta_{s,n}^{(2)}(\rho,t)$, $\mathrm{V_n}=V_n^{(1)}+i\,\mathrm{V_n^{(2)}}$, $\mathrm{W_n}=W_n^{(1)}+i\,\mathrm{W_n^{(2)}}$,
і – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta_s(\rho,\varphi,t)$ функції дійсні, обмежимося надалі розглядом $\theta_{s,n}(\rho,t)$ для n=0,1,2,…,тому що $\theta_{s,n}(\rho,t)$ і $\theta_{s,-n}(\rho,t)$ будуть комплексно спряженими [4]. Підставляючи значення функцій з (8) у (3)-(7) у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_{s,n}^{(i)}\right] \tag{9}$$

з початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0)=0,\qquad \frac{\partial\theta_{s,n}^{(i)}(\rho,0)}{\partial t}=0, \tag{10}$$

граничною умовою

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_0,t)=W_n^{(i)},\qquad \theta_{2,n}^{(i)}(1,t)=V_n^{(i)}, \tag{11}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t) \tag{12}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho} \tag{13},$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n;\quad \vartheta_n^2=\omega n;\ \mathrm{m_1}=2,\ \mathrm{m_2}=1;\quad$ i=1,2.

Для розв’язання крайової задачі (9)-(13) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\bar f(\mu_{n,k})=\int_{\rho_0}^{1}\frac{Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)}{\alpha(\rho)}\rho\ \mathrm{f}(\rho)d\rho\ =\ \sum_{s=1}^{2}\int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s}\frac{Q_s\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)}{\alpha_s^2}\rho\,\mathrm{f}(\rho)d\rho \tag{14}$$

де $$Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right),\ \alpha(\rho)=\begin{cases}Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right),\ \alpha_1^2 & якщо\quad \rho\in(\rho_0,\rho_1)\\ Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right),\ \alpha_2^2 & якщо\quad \rho\in(\rho_1,\rho_2)\end{cases}$$

Власні функції $Q_s\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d^2Q_s}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dQ_s}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}+\frac{\mu^2{}_{n,k}}{\alpha_s^2}Q_s=0 \tag{15}$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)=0,\quad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)=0, \tag{16}$$

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)=Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right),\quad \lambda_1\frac{\partial Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\partial\rho}\ (\text{ s=1,2; }) \tag{17}$$

Розв'язавши задачу Штурма-Ліувілля (15)-(17), одержуємо:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)=\frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)},\qquad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)},$$

де $$\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)-J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right);$$

$$\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right),$$

$J_n(x)Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно до [3].

Власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\mu_{n,k}\Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}=\sigma\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)},$$

де $H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y'_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$; $\sigma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\|^2}\ \bar{f}(\mu_{n,k}) \qquad (18),$$

де квадрат норми власної функції $\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\|^2$ дорівнює:

$$\left\|Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)\right\|^2=\frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}-\frac{\rho_0^2}{2\alpha_1^2}\cdot\left[\frac{\Lambda'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}\right]^2+$$

$$+\frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2}\left[\frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\mu_{n,k}\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2-\frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\alpha_2 H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\mu_{n,k}\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (9) інтегральне перетворення (14) і, враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:
:

$$\frac{d\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt}+\vartheta_n^{(i)}\left[\bar{\theta}_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{d\bar{\theta}_n^{(m_i)}}{dt}\right]+\tau_r\frac{d^2\bar{\theta}_n^{(i)}}{dt^2}=\mu_{n,k}\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}-\mu_{n,k}^2\bar{\theta}_n^{(i)}\ , \qquad (19)$$

де $\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=\frac{\rho_0}{\alpha_1}Q_1'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)W_n^{(i)}-\frac{1}{\alpha_2}Q_2'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)V_n^{(i)}$

з початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)=0, \qquad \frac{\partial\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)}{\partial t}=0\ . \qquad (\ \mathrm{i}=1,2.) \qquad (20)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (19) з початковими умовами (20) інтегральне перетворення Лапласа [4]:

$$\tilde{f}(s)=\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)}$

$$s\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\bar{\theta}}_n^{(m_i)} + \tau_r s\tilde{\bar{\theta}}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)} = q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu_{n,k}} - \tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)}\right) \qquad (21),$$

де i=1,2; $q_{n,k} = \mu^2{}_{n,k}$.

Розв’язавши систему рівнянь (21), одержуємо:

$$\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)} = \alpha_{n,k}\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right) + (-1)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1 + s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right)^2 + \omega^2 n^2(1 + s\tau_r)^2}, \qquad (\mathrm{i}=1,2) \qquad (22),$$

де $\alpha_{n,k} = \mu_{n,k}$.

Застосовуючи до зображення функцій (22) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r\omega ni\right] + \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n - (2\tau_r s_j + 1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r\omega ni\right] + \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n + (2\tau_r s_j + 1)i\right]\right\},$$
$$\cdot\left(e^{s_j t} - 1\right), \qquad (23)$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r\omega ni\right] - \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n - (2\tau_r s_j + 1)i\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r\omega ni\right] - \tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n + (2\tau_r s_j + 1)i\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right), \qquad (24)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \dfrac{0.5 s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r\omega ni - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r\omega ni)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\ s_{,3,4} = \frac{(\tau_r\omega ni + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r\omega ni)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (8) і (18), одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного

радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+i\cdot\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\frac{Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)}{\left\|Q_0\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_s}\rho\right)\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (23),(24).

Висновки

У статті, за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення, знайдено температурне поле порожнього кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є. Знайдено аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну порожнього циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, і може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (у супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

Література

1. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: РВВ ДНУ, 2005.– С.37–44.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б.М. - Львів: Видавництво Львівської політехніки. - 2010. - 384 с.
4. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є-Лапласа: узагальнення та застосування / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус. - Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка - 2014. -152 с.

Literatura

1. Berdnyk M.H. Matematychne modelyuvannya temperaturnoho polya v tsylindri, yakyy obertayet'sya, z urakhuvannyam kintsevoyi shvydkosti poshyrennya tepla // Pytannya prykladnoyi matematyky i matematychnoho modelyuvannya. – D.: RVV DNU, 2005.– S.37–44.
2. Konet I.M. Hiperbolichni krayovi zadachi v neobmezhenykh trysharovykh oblastyakh / I.M. Konet, M.P. Lenyuk. — L'viv, 2011. — 48 s.
3. Markovych B.M. Rivnyannya matematychnoyi fizyky / Markovych B.M. - L'viv: Vydavnytstvo L'vivs'koyi politekhniky. - 2010. - 384 c..
4. Lopushans'ka H.P. Peretvorennya Fur"ye-Laplasa: uzahal'nennya ta zastosuvannya / H.P. Lopushans'ka, A.O. Lopushans'kyy, O.M. M"yaus. - L'viv.: LNU im. Ivana Franka - 2014. -152 s.

RESUME

M.G. Berdnyk

Mathematical model and method of solution with the new integral transformation of a generalized boundary problem piecewise uniform heat transfer cylinder

This paper deals with the calculation of unsteady temperature field empty cylinder hollow circular cylinder outer radius R in a cylindrical coordinate system, piecewise uniform in the direction of the polar radius r, which rotates at a constant angular velocity axis OZ, taking into account the finite speed of propagation of heat. Thermal properties are in each layer independent of temperature conditions ideal thermal contact between the layers and internal heat source available. At the initial time the cylinder temperature constant, and the outer and inner surfaces of the cylinder temperature is known and does not depend on time.

The mathematical model of temperature distribution in a piecewise homogeneous cylinder, which rotates at a constant angular velocity axis OZ taking into account the finite speed of propagation of heat in the form of mathematical physics boundary problem for a system of hyperbolic differential rivnyanyan thermal conductivity with boundary conditions of the first kind. To solve the boundary problem received the required temperature field is presented as a complex Fourier series. Developed new integral transformation for piecewise homogeneous space with which found the temperature field of continuous piecewise homogeneous circular cylinder in a convergent series in special orthogonal functions and Fourier Bessel.

Found analytical solution of the generalized boundary problem of heat transfer cylinder that rotates, given finite velocity of propagation of heat can be used in the modulation of temperature fields arising in many technical systems (in satellites, rolls, turbines, etc.).

Надійшла до редакції 26.08.2016